

Simulación de la evolución del tamaño de grano a lo largo de la profundidad de un glaciar, usando el método Monte Carlo en tres dimensiones

Di Prinzio, C. L.^{1,2}; Druetta, E.¹; Nasello, O. B.^{1,2}

¹ FAMAF (Facultad de Matemática Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba) Medina Allende y Haya de la Torre, Ciudad Universitaria (5000). carlosdiprinzio@gmail.com

² CONICET (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología).

► **Resumen** — En este trabajo se presenta un modelo de simulación de crecimiento de grano en tres dimensiones usando el método Monte Carlo aplicable a hielos extraídos de glaciares o de las zonas polares terrestres. El modelo incluye la influencia de burbujas, partículas y de la anisotropía existente en la energía interfacial entre los distintos granos. En trabajos previos se mostró que el crecimiento de grano es afectado por la densidad y tamaño de las partículas. Este trabajo demuestra que la anisotropía de la energía disminuye el crecimiento de grano. También se puede ver que el efecto combinado de frenado del crecimiento de grano de las partículas y de la anisotropía en la energía de los bordes de grano es multiplicativo.

Palabras claves: Crecimiento de grano, efecto Zener, borde de grano, Monte Carlo.

► **Abstract** — "Simulation of the grain size evolution throughout the depth of a glacier, using the Monte Carlo method in three dimensions". A three-dimensional numerical model of grain growth using Monte Carlo algorithm is presented in this work. The model is applied to ice cores from ice caps. The model includes the effects of the particles, bubbles and anisotropic grain boundary energy. The previous works demonstrate that the grain growth is affected by the size and the density of the particles. With present model is demonstrated that the effects of the particles and the anisotropic grain boundary energy are multiplicative

Keywords: Grain growth, Zener effect, grain boundary, Monte Carlo.

INTRODUCCIÓN

Cuando se observa como varían la textura y el tamaño de los granos de un glaciar con la profundidad, se observan cambios que normalmente son explicados con procesos de crecimiento de grano normal (CGN), crecimiento de grano frenado por impurezas (CGI), recristalización, poligonización, etc. (Thorsteinsson *et al.* 1997). La poligonización es un fenómeno en donde un grano se divide en granos con orientaciones cristalinicas cercanas. Esto se produce cuando los granos en cuestión liberan las tensiones que acumulan con la profundidad debido al aumento de la presión, creando barreras de dislocaciones que generan bordes de grano de bajo ángulo. La recristalización es un proceso donde se nuclean nuevos granos con

desorientaciones no cercanas entre sí, liberándose así las tensiones acumuladas.

En capas de hielo no muy profundas (menor a 500 metros) (Durand *et al.* 2004) sólo están presentes algunos procesos de los mencionados como CGN y CGI, ya que la deformación todavía es muy baja. Debido a la poca profundidad no se observan en estos hielos efectos de poligonización o recristalización (Di Prinzio *et al.* 2005). Los procesos activos están superpuestos y aún hay grandes discrepancias sobre cuáles son las leyes que los rigen (Barnes *et al.* 2002, Weiss *et al.* 2002, Durand *et al.* 2008). El tamaño de grano en estas capas puede estar afectado por las burbujas, las impurezas no solubles y solubles y por la anisotropía en la energía y movilidad de los bordes de grano (Trombotta Liaudat *et al.* 2008). Pueden estos procesos hacer que el cuadrado del tamaño medio de los granos (R) no se comporte linealmente

te con el tiempo mediante la ley $R^2 - R_0^2 = k(t - t_0)$ donde R_0 es el radio medio inicial, t el tiempo y t_0 el tiempo inicial, como lo predice la teoría de crecimiento de grano normal.

El crecimiento de grano con partículas inmóviles fue estudiado mediante simulaciones numéricas por los presentes autores (Di Prinzio *et al.* 2013). En este trabajo se muestra que las partículas frenan el movimiento de los bordes de grano y el frenado depende del tamaño y de la fracción del volumen total ocupado por las partículas.

Otros autores han visto además que la anisotropía de la energía de los bordes de grano afecta el crecimiento de grano (Yu *et al.* 2009). En general se ha encontrado que el cuadrado del tamaño medio de los granos (R^2) no se comporta linealmente con el tiempo y se observa claramente un efecto de frenado en muestras bidimensionales. La forma de los granos es fuertemente dependiente del modelo usado para la energía de los bordes de grano. El modelo de energía basada en la función logarítmica es uno de los modelos más usado en la literatura, ya que produce granos de forma uniforme (Yu *et al.* 2002). Esta función de energía de borde de grano está presentada en la ecuación (5).

El crecimiento de grano con efectos simultáneos de la anisotropía de la energía de borde de grano y la inclusión de partículas fue estudiado por Fjeldberg y Marthinsen (2010). Los autores utilizaron un modelo de Monte Carlo en tres dimensiones y modelando la energía de borde de grano con una función logarítmica. Sin embargo en este trabajo solo estudian la distribución de tamaño de grano después de una recristalización y del crecimiento de grano. El trabajo no menciona cómo es la evolución temporal del tamaño de los granos.

En un glaciar o en los hielos polares podemos ver que el crecimiento de grano hasta los 500-800 metros de profundidad está siendo afectado por partículas, y en general se observa una marcada tendencia a tener los granos con desorientaciones de bajo ángulo. La energía de los bordes de grano en hielo es anisotrópica (Di Prinzio *et al.* 2014) y este hecho

podría explicar esta característica de los hielos polares. Interpretar correctamente los procesos que ocurren a esta profundidad en un glaciar, es de mucha importancia pues de allí se obtienen parámetros físicos necesarios para predecir el comportamiento de los glaciares con el paso del tiempo.

En este trabajo se presenta un modelo de simulación de crecimiento de grano en tres dimensiones usando el método Monte Carlo. Se estudia el efecto sobre el crecimiento de grano de burbujas, partículas y de la anisotropía en la energía de los bordes de grano.

MODELO Y SIMULACIÓN

El algoritmo de CG por Monte Carlo en 3D trabaja sobre una matriz $200 \times 200 \times 200$ pixel³ (pixel es la unidad de longitud que usaremos y representa la distancia entre dos puntos consecutivos de la matriz). Cada punto (i, j, k) de la matriz tiene asociado tres números: l que da la ubicación en la matriz $l_{ijk} = 1 + j + (i-1) \cdot 200 + (k-1) \cdot (200^2)$ (l está entre 1 y $Q = 200^3$, i, j y k están entre 1 y 200), c_l elegido al azar comprendido entre 1 y Q , y $S_l = c_l \cdot 90 / Q$ que representa una orientación cristalina entre 0 y 90°. Los granos en la matriz están representados por zonas de puntos con igual número S_l y c_l . Cada punto de la matriz tiene un número fijo de vecinos dependiendo de la simetría de la matriz y de que orden de vecinos se considera. Para una red cúbica, por ejemplo, los primeros vecinos son 6, los segundos vecinos 12 y los terceros son 8. Por lo cual si se considera hasta los terceros vecinos da un total de 26.

La energía total del sistema W está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^Q \sum_{m=1}^{26} \Gamma(s_l, s_m) (1 - \delta_{s_l s_m}) \quad (1)$$

donde $\Gamma(s_l, s_m)$ es la energía de interacción entre las orientaciones S_l y S_m y es constante cuando el crecimiento de grano es normal, δ representa la función delta de Kronecker.

Para encontrar la configuración con energía más baja que la configuración ini-

cial, se deben modificar las orientaciones S de los puntos de la matriz. Para ello se elige un punto de la matriz (i,j,k) (o sea un dado S_i) al azar y se intercambia el valor S_i con el valor $S_{i'}$ de uno de sus vecinos (i',j',k') (o sea un dado $S_{i'}$), elegido también al azar. Como sólo se modifica la energía total W en el entorno del punto (i,j,k) no es necesario calcular W para todos los sitios de la matriz. Por lo tanto podemos redefinir la energía local W_L alrededor del punto (i,j,k) como:

$$W_L^I = \sum_{i=1}^{24} \Gamma(s_I, s_i)(1 - \delta_{s_I s_i}) \quad (2)$$

Si calculamos ahora la W_L alrededor de (i,j,k) cuando el valor S_i se reemplazó por el valor $S_{i'}$,

$$W_L^{I'} = \sum_{i=1}^{24} \Gamma(s_{I'}, s_i)(1 - \delta_{s_{I'} s_i}) \quad (3)$$

el cambio de orientación en (i,j,k) de S_i a $S_{i'}$ se producirá de acuerdo a una función de probabilidad $P(S_i, S_{i'})$ definida como:

$$P(S_i, S_{i'}) = \begin{cases} 1 & \text{..si..} \Delta W_L < 0 \\ e^{-\frac{\Delta W_L}{kT}} & \text{..si..} \Delta W_L \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Delta W_L = W_L^{I'} - W_L^I$$

k representa la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Si $\Delta W_L < 0$ la función $P(S_i, S_{i'})$ es igual a 1 y entonces se produce el cambio. Cuando $\Delta W_L \geq 0$, se elige un número al azar entre 0 y 1 y sólo se efectúa el cambio cuando el número resultante es menor que $P(S_i, S_{i'})$. El ciclo completo de análisis de intercambio se completa cuando todos los puntos de la matriz han sido analizados con el procedimiento anterior y el ciclo se define como un paso de Monte Carlo (MCS).

En el caso de agregar partículas en el modelo debemos definir cuál es la concentración « f » y el tamaño de las partículas. En este trabajo se fijó una concentración $f=0,01$ y una partícula cúbica de lado igual a 3 pixeles. Se tomó una cantidad $N=Q*f/9$ de sitios (i,j,k) al azar con valores de $C_i=0$ y $S_i=0$. Luego también se hacen nulos los valores C_i y S_i de los vecinos alrededor de ese punto, dando un total de 9 sitios para una partícula de lado 3 pixeles. Eso nos genera partículas cúbicas cuyos lados tienen 3 pixeles de longitud, de la misma forma se pueden definir partículas de diámetros mayores. Las partículas son inmóviles y la energía de interacción $\Gamma(s_i = 0, s_j)$ con los demás sitios es nula.

Cuando incorporamos al modelo la energía anisotrópica de los bordes de grano se usa la función de energía de interacción $\Gamma(s_i, s_j)$ definida según (5).

$$\Gamma(s_I, s_i) = \begin{cases} (1-A) \frac{|s_I - s_i|}{20} \left\{ 1 - \log \left[\frac{|s_I - s_i|}{20} \right] \right\} + A & \text{si } \frac{|s_I - s_i|}{20} < 1 \\ 1 & \\ & \text{si } \frac{|s_I - s_i|}{20} \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

con $A = 0$ (también el modelo acepta $A \neq 0$)

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Las simulaciones se realizaron de forma tal que sean aplicables a los hielos del GISP2 correspondientes a profundidades menores a 500 m. Para ello, sabiendo el tamaño de los granos a los 500m en GISP2 (Di Prinzio y Nasello, 2011) y el tamaño y densidad de las partículas (Alley y Fitzpatrick, 1999), se encontró la cantidad de partículas cúbicas de lado 3 pixel correspondientes a la concentración de partículas $f=0,01$ encontrada en el GISP2.

En estas simulaciones la energía del borde de grano fue representada por la ecuación (5) y la desorientación de los granos

está representada sólo por un ángulo. Esta simplificación está basada en que, hasta hace muy poco tiempo, sólo se medía la dirección del eje «c» de los granos en los hielos polares, desconociendo la orientación de otras direcciones cristalográficas (Wilén *et al.* 2003). Sin embargo, recientemente, se ha mejorado la técnica de detección de orientación de cristales (Chan *et al.* 2014), pudiéndose en el futuro mejorar el modelo de simulación presente.

En la figura 1 se presentan las imágenes de los policristales obtenidos en las simulaciones de Monte Carlo en 3 dimensiones a

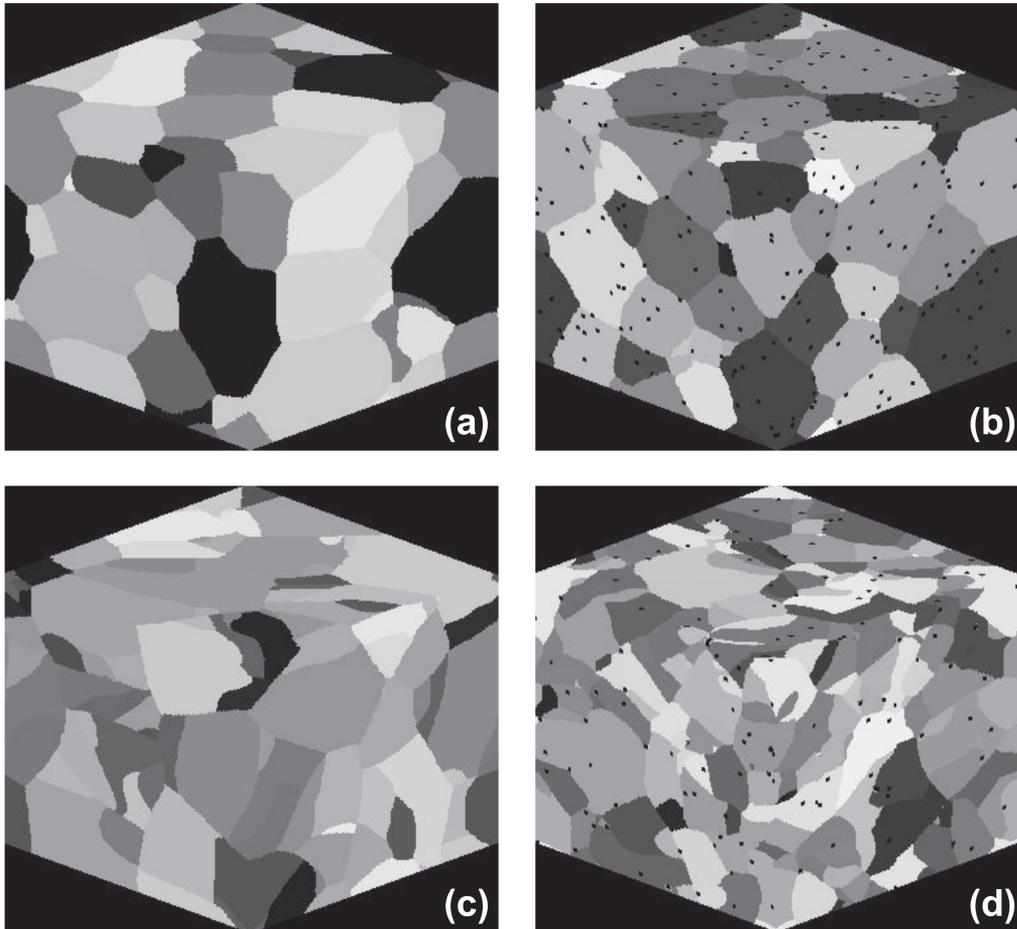


Figura 1. Policristales obtenidos mediante la simulación a los 4000 MCS con a) Energía uniforme, b) con energía uniforme pero con una fracción del 1% de partículas, c) Con energía anisotrópica como la ecuación 5) y d) Con energía anisotrópica como la ecuación 5) y con una fracción del 1% de partículas.

los 4000 MCS: (a) con energía uniforme, (b) con energía uniforme y partículas, (c) con energía no uniforme y sin partículas y (d) y con energía no uniforme y con partículas. En la figura 1 a, podemos ver que en el caso de la simulación con energía uniforme, las uniones triples entre granos forman ángulos de 120° y los granos dan la apariencia de ser formas redondeadas y sin interfaces planas. Igualmente características tiene los granos en el caso de incorporar partículas (figura 1 b). Cuando las simulaciones están hechas con energía de borde de grano variable, vemos que hay un notable aumento de uniones de bordes de granos mayores a 3, siendo los bordes de grano más planos (figura 1 c). Se notan iguales características en la muestra con partículas y energía de borde de grano variable (figura 1 d). Recordemos que la minimización de la energía total de sistema en este caso se debe a la reducción de área entre los granos y que la desorientación entre los granos tenga la más baja energía posible de acuerdo a la ecuación (5).

Vemos también que el tamaño de grano, en el mismo tiempo de simulación, es diferente de una muestra a otra. En la figura 2 se presenta la evolución del cuadrado del radio medio de los granos (R^2) hasta 4000 MCS para las diferentes situaciones antes mencionadas.

Podemos ver en la figura 2 (curva a) que cuando la energía es uniforme, R^2 evoluciona linealmente, como indica la teoría y los resultados experimentales (Thorsteinsson *et al.* 1997). Sin embargo cuando se colocan partículas (curva b) o la energía del borde de grano es anisotrópica (curva c), el valor de R^2 crece menos durante las simulaciones y las relaciones dejan de ser lineales. Podemos notar además que ambas simulaciones dan resultados similares pero este hecho es sólo debido a los parámetros elegidos para cada caso particular. Al ver la evolución de R^2 con el MCS en el caso de un policristal con el 1% de partículas dispersas y con energía variable (curva d) podemos observar que el crecimiento de grano está notablemente frenado.

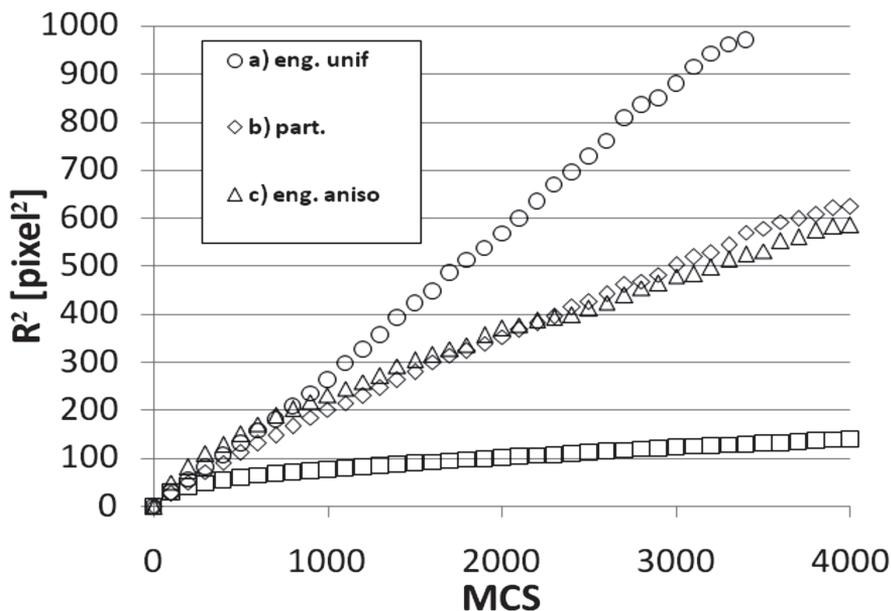


Figura 2. Radio medio cuadrado (R^2) vs MCS hasta 4000 MCS de un policristal con a) Energía uniforme, b) con energía uniforme pero con una fracción del 1% de partículas, y lado 3 pixel c) Con energía anisotrópica como la ecuación 5) y d) Con energía anisotrópica como la ecuación 5) y con una fracción del 1% de partículas.

En la figura 2, claramente se puede ver que a los 4000 MCS, los casos de un policristal con partículas (curva b) y con energía variable (curva c) R^2 disminuyó a la mitad con respecto al R^2 correspondiente al mismo tiempo en el policristal con energía uniforme (curva a). En el caso de los efectos conjuntos (curva d), el R^2 disminuyó en 4000 MSC casi una cuarta parte del R^2 que se obtiene al mismo tiempo en el policristal con energía uniforme. Esto puede interpretarse como que el efecto de las partículas y de la energía interfacial variable sobre el crecimiento de grano es multiplicativo. El efecto de frenado observado está en concordancia con las observaciones experimentales hechas en muestras de hielo polar a diferentes profundidades (Di Prinzio *et al.* 2005).

En las muestras de hielo polar se ha determinado la orientación del eje cristalino «c» (eje perpendicular al plano basal) mediante diferentes métodos (Wilén *et al.* 2003). Esta información permite estudiar cómo evolucionan las orientaciones con el paso del tiempo. Con esa información se puede saber el ángulo de desorientación (Ψ) entre los vecinos a fin de estudiar efectos de poligonización, ver si existen subgranos, o si se van formando bordes de grano de bajo ángulo, etc.

Como mencionamos, la poligonización es un efecto producido por la deformación del hielo que da como resultado el aumento de BG de bajo ángulo, sin embargo debido a la migración anisotrópica de los bordes de grano también pueden generarse desorienta-

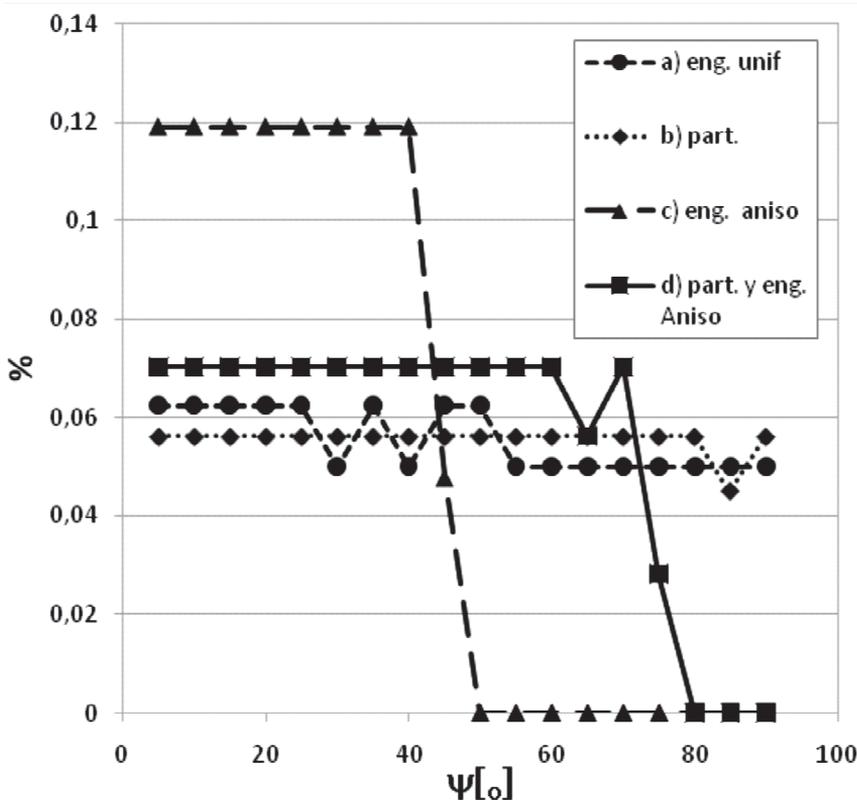


Figura 3. Porcentaje de las desorientaciones ($\Psi[^\circ]$) entre granos vecinos 4000 MCS de un policristal con a) Energía uniforme, b) con energía uniforme pero con una fracción del 1% de partículas, y lado 3 pixel c) con energía anisotrópica como la ecuación 5) y d) Con energía anisotrópica como la ecuación 5) y con una fracción del 1% de partículas.

ciones de bajo ángulo entre granos vecinos (Ψ).

Para cada grano en las muestras policristalinas simuladas en este trabajo se asignó un ángulo entre 0 y 90° que representa la orientación del grano. Con esa información podemos estudiar la evolución de las desorientaciones entre los granos vecinos (Ψ).

Inicialmente la distribución de las desorientaciones entre los granos vecinos (Ψ) es uniforme para cada muestra simulada. Esta distribución puede ser afectada por las partículas presentes en la muestra o por la energía anisotrópica del borde de grano.

En la figura 3 se muestra el porcentaje de desorientaciones entre los granos vecinos (Ψ) para los distintos tipos de muestras estudiadas luego de 4000 MCS. El valor de Ψ puede estar entre 0 y 90°. Podemos ver, en general, que las simulaciones con energía uniforme (curva a) y con partículas dispersas del 1% (curva b) presentan una distribución de Ψ aproximadamente uniforme. Estas curvas no muestran cambios en las desorientaciones entre granos Ψ durante la simulación. Sin embargo cuando uno coloca energía de borde de grano anisotrópica (curva c), las desorientaciones entre granos vecinos Ψ mayores a 45° desaparecen luego de las 4000 MCS y se observa un aumento en las desorientaciones de bajo ángulo. Claramente si la simulación hubiera seguido la texturización (proporción de desorientaciones entre granos Ψ de bajo ángulo) hubiese aumentado. El crecimiento de grano con energía de borde de grano variable tiende a minimizar el área de borde de granos y haciendo que las desorientaciones entre granos sea de baja energía de acuerdo a la ecuación (5). Algo similar ocurre durante la simulación de crecimiento de grano con partículas y con energía de borde de grano variable (curva d). Sin embargo se puede ver que el efecto de las partículas frena la texturización observada ya que esta es menos notable que en el caso de crecimiento de grano con energía de borde de grano variable (curva c). En la curva (d) podemos ver que las desorientaciones entre granos vecinos mayores de 75° han desaparecido, mientras que se ve un leve au-

mento de las desorientaciones inferiores a 75°.

Con estas simulaciones pudimos ver que las impurezas y la anisotropía en la energía del borde de grano en hielo frenan el crecimiento de grano. El efecto conjunto de las partículas y de la energía anisotrópica produce un efecto de frenado mucho mayor. Este efecto es multiplicativo en este caso particular donde se ha elegido un determinado tipo de energía anisotrópica, cantidad y tamaño de las partículas. Así mismo pudimos observar que las impurezas y la anisotropía en la energía del borde de grano producen un cambio en la distribución de las desorientaciones de los granos vecinos inicial, es decir, un aumento de desorientaciones de bajo ángulo. Eso está en coincidencia con las observaciones experimentales hechas en muestras de hielo polar a diferentes profundidades (Alley *et al.* 2003). Sin embargo el efecto de aumento de las desorientaciones de bajo ángulo con la profundidad, no fue hasta ahora relacionado con la energía anisotrópica del hielo. Creemos que la poligonización observada en hielo puede estar combinada con los efectos que produce la energía anisotrópica de los bordes de grano sobre las desorientaciones entre granos.

CONCLUSIONES

Los policristales usados en esta simulación tienen las mismas características que las muestras policristalinas encontradas en los hielos polares o glaciares para bajas profundidades. Algunos policristales naturales tienen impurezas o partículas dispersas, otros tiene una marcada orientación preferencial en los granos y otros policristales tiene ambas propiedades. Por esa razón en este trabajo se simularon policristales con las siguientes características: a) energía uniforme, b) energía uniforme pero con partículas, c) energía anisotrópica y d) energía anisotrópica y partículas.

Por los resultados encontrados se puede concluir que:

a) Las impurezas y la energía anisotrópica disminuyen el crecimiento de grano.

b) El efecto simultáneo de las impurezas y la energía interfacial variable produce una reducción mayor sobre el crecimiento de grano que los efectos individuales.

c) Creemos que el frenado en el crecimiento de grano observado en muestras de hielo polar a bajas profundidades puede deberse al efecto conjunto de las partículas dispersas y a energía superficial variable.

d) A partir de los 800 metros, en algunos pozos de hielo polar, las muestras de hielo sufren un fenómeno de poligonización (Alley *et al.* 1995). Este trabajo está demostrando que la energía de borde de grano anisotrópica en un policristal produce también un tipo de texturización en la muestra a poca profundidad. Sin embargo este efecto sigue activo a más profundidad y este podría ser confundido con el efecto de poligonización propiamente dicho.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias a la ayuda económica brindada por los subsidios de CONICET y SECYT. Se agradece la colaboración del Sr. José Barcelona.

REFERENCIAS

- Alley, R., Gow, A., Meese, D. 1995. Mapping c-axis fabrics to study physical processes in ice. *J. Glaciol.* 41, 197-203.
- Alley R. y Fitzpatrick J. 1999. Conditions for bubble elongation in cold ice-sheet ice, *Journal of Glaciology*, Vol. 45, No. 149, 149-153.
- Barnes, P., Mulvaney, R., Robinson K. y Wolff, E. 2002. Observations of polar ice from the Holocene and glacial period using the scanning electron microscope. *Ann. Glaciol.* 35, 559-566.
- Chan, W., Mah, M., Voight, D., Fitzpatrick, J. y Talghader, J. 2014. Crystal orientation measurements using transmission and backscattering. *Journal of Glaciology*, 60, 224, 1135-1139
- De La Chapelle, S., Castelnaud, O., Lipenkov, V., Duval, P. 1998. Dynamic recrystallization and texture development in ice as revealed by the study of deep ice cores in Antarctica and Greenland. *J. Geophys. Res.* 103, 5091-5105.
- Di Prinzio C., Wilen L., Alley R., Fitzpatrick J., Spencer, M. y Gow A. 2005. Fabric and texture at Siple Dome, Antarctica, *Journal*, 51, 173, 281-290.
- Di Prinzio, C. y Nasello, O. 2011. Development of a model for ice core dating based on grain elongation, *Polar Science*, Volume 5, Issue 3, p. 319-326.
- Di Prinzio C., Druetta E. y Nasello O. 2013. More about Zener drag studies with Monte Carlo simulations, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 21, 025007 (8 páginas)
- Di Prinzio C., Druetta E. y Nasello O. 2014. Effect of Temperature and Potassium Chloride Impurity on the Relative <1010> Tilt Grain Boundary and Surface Free Energies in Ice *J. Phys. Chem. B*, 118 (47), 13365-13370
- Durand G., Graner F. y Weiss J., 2004. Deformation of grain boundaries in polar ice, *Europhys. Lett.* 67 (6), 1038-1043
- Durand, G., Persson, A., Samyn, D. y Svensson, A. 2008. Relation between neighbouring grains in the upper part of the NorthGRIP ice core, Implications for rotation recrystallization. *Earth Planet. Sci. Lett.* 265, 666-671.
- Fjeldberg E. y Marthinsen K. 2010. 3D Monte Carlo study of the effect of grain boundary anisotropy and particles on the size distribution of grains after recrystallisation and grain growth, *Computational Materials Science*, 48, 2, 267-281
- Thorsteinsson, T., Kipfstuhl J. y Miller H. 1997. Textures and fabrics in the GRIP ice core. *J. Geophys. Res.*, 102 (C12), 26,583-26,599.
- Trombotto Liaudat, D., Arena, L. y Caranti, G. 2008. Glacial Ice as Cryogenic Factor in the Periglaciation Zone of the Composed Rockglacier Morenas Coloradas, Central Andes of Mendoza, Argentina. Ninth International Conference on Permafrost, Proceedings, Vol 2: 1781-1786, Ed. Douglas L. Kane and Kenneth M. Hinkel, Institute of Northern Engineering, University of Alaska, Fairbanks, Alaska.
- Weiss, J., Vidot, J., Gay, M., Arnaud, L., Duval, P. y Petit, J.R., 2002. Dome Concordia ice microstructure: Impurities effect on grain growth. *Ann. Glaciol.* 35, 552-558.
- Wilen L., Di Prinzio C., Alley R. y Azuma N. 2003. Development, principles, and applications of automated ice fabric analyzers, *Microscopy research and technique* 62: 2-18
- Yu, Q. y Esche, S. 2002. Modeling of grain growth kinetics with Read-Shockley grain boundary energy by a modified Monte Carlo algorithm. *Materials Letters*, 56, 1-2, 47-52.
- Yu, Q., Nosonovsky M. y Esche S. 2009. Monte Carlo simulation of grain growth of single phase systems with anisotropic boundary energies. *International Journal of mechanical science*, 51, 434-442