

La distribución de densidad normal circular y sus aplicaciones en Geología

por Gerardo E. Bossi

IESGLO, FCN e IML, UNT, Miguel Lillo 205, (4000) Tucumán, Argentina. C. Elec. <iesglount@satlink.com.>
y <gbossi@mail.unt.edu.ar>. Telefax (54381)432-1165.

Abstract. The Von Mises or circular normal density distribution [$\Phi(X;\mu;k)$] is defined by two parameters: μ (the mode) and k (the concentration coefficient) which is in turn related to the resultant vector, R . The distribution is appropriated for the analysis of angular data (paleocurrents and annual climatic periodicities). The distribution reduced to a plane variability, has a variation range of $0^\circ - 360^\circ$. This angular range makes the Von Mises distribution better fitted than the linear normal distribution where the range can not go over 114° in order to be used with angular data. The data could also be frequencies with a periodicity of 360 days. However, it is necessary to adjustment the original climatic annual frequencies to even 30-days month frequencies. The circular normal distribution do not depend on the central tendency or the range. The differences between the mode and antimode define the degree of preferred orientation of the data. A basic discussion of theoretical assets and necessary tables are included. The practical procedures are illustrated with two numeric examples: a paleocurrent locality and annual climatic data.

Keywords: Statistics, Von Mises Distribution, Circular Normal Distribution, Cyclic data and weather cycles, paleocurrents and angular data.

Resumen. La distribución de von Mises también conocida por distribución de densidad normal circular [$\phi(X,\mu,k)$], es adecuada para el análisis de datos angulares (mediciones de paleocorrientes, planos o direcciones estructurales) y otros de periodicidad anual (especialmente climáticos). Los parámetros son μ (la moda) y k (un parámetro de concentración relacionado con el módulo del vector resultante, R , denominado coeficiente de concentración). La distribución reducida a la variable direccional horizontal, tiene un rango de variación entre 0° y 360° . La distribución de von Mises permite evitar el uso de la distribución normal lineal que no siempre es aplicable a estos casos, en especial cuando el rango de variación supera los 114° . La distribución es aplicable a datos climáticos anuales y cíclicos de cualquier periodicidad (p.ej.: diurna). La distribución normal circular no depende de una tendencia central (media más frecuente) sino más bien de las relaciones entre la moda y antimoda. Para su aplicación, se reseñan los aspectos teóricos básicos, las tablas necesarias y dos ejemplos con el respectivo cálculo numérico.

Palabras claves: Estadística; Von Mises distribution; Distribución normal circular; Datos cíclicos. Ciclos Climáticos; Paleocorrientes. Datos angulares.

Introducción

La distribución de densidad normal circular (Gumbel et al, 1953, Gumbel, 1954, Krumbein y Graybill (1965, Steinmetz, 1969, Potter and Pettijohn, 1977), denominada también distribución de *von Mises* (Fisher, 1993, McLane, 1995, Swan y Sandilands, 1995) es ideal para el tratamiento de datos angulares, p.ej.: el análisis de paleocorrientes y(o) datos numéricos relacionados con una

periodicidad anual. Es desde el punto de vista matemático más adecuada que la distribución normal lineal desplegada en un círculo o usada como aproximación (Agterberg y Briggs, 1963, Bossi y otros, 1975, 1977, Bossi, 1982, Tófaló y otros, 1985), cuando su rango de variación no excede de 114° .

Varios autores de textos de estadística aplicada a la Geología, entre ellos: Davis

(1986), Fisher (1993), McLane, (1995) y Swan y Sandilands (1995) han propuesto el uso de la distribución normal circular por ser más eficiente para el análisis de datos azimutales y una posibilidad interesante para el análisis de datos cíclicos anuales. Kovach (1994) publicó *ORIANA FOR WINDOWS*®, un programa de cómputo que resuelve los estadísticos necesarios y dibuja histogramas circulares (rosas de los vientos), en dos variantes: frecuencia proporcional al radio y (o) al área de cada segmento cónico. Esta última representación es preferible, pues evita el efecto visual de exageración en las clases con frecuencia alta. Los datos circulares también pueden ser representados en un histograma lineal (figura 1).

En este trabajo se describen los aspectos más salientes de la distribución normal circular, con la finalidad de divulgar su uso en Geología y se ofrecen dos ejemplos de cálculo, sus estadísticos, tablas complementarias y presentaciones gráficas.

La distribución normal circular

Gumbel y otros (1953) y Gumbel (1954) desarrollaron la teoría y ejemplos prácticos aplicados a datos cíclicos anuales.

La expresión general, para la frecuencia ϕ , es:

$$\phi(X_i, \mu, k) = C e^{k \cos(X_i - \mu)} \quad (1)$$

donde μ es la moda; k es el parámetro de concentración; X_i , la variable y C es una constante que expresa el área bajo la curva de densidad circular (figuras 1 y 2).

El rango es: $\mu - \pi \leq X \leq \mu + \pi$

$0 < \mu < 2\pi$; y

$k > 0$

si $k = 0$, la distribución es uniforme y

la constante $C = 1 / 2\pi I_0(k)$

Cuando $C=1$, la distribución tiene el área igual a la unidad y es equiparable a la curva normal patrón de las distribuciones normales lineales. Esta constante está a su vez relacionada con la expresión $1/I_0(k)$, donde $I_0(k)$ es una función Bessel de orden cero modifi-

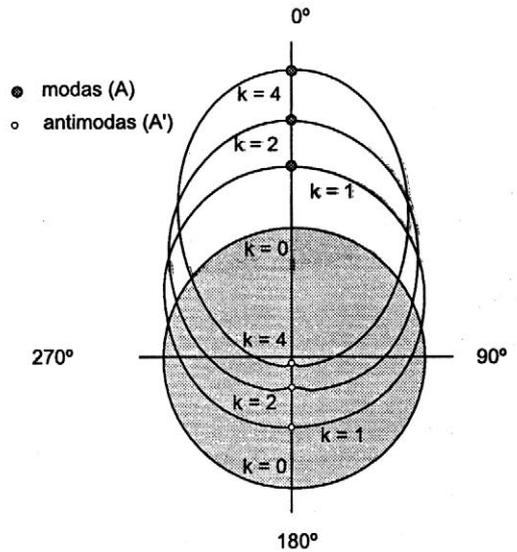


Fig. 1. Distribuciones de Von Mises para distintos valores de k. La curva grisada corresponde a una distribución uniforme (k=0). A partir del valor k=2 se observa una entranque en la antimoda (A').

cada, del parámetro k . La distribución de Von Mises no debe confundirse con la distribución lineal enroscada en un círculo, pues la variable, X_i , en este caso va de $-\infty$ a $+\infty$ y los valores de X pueden superponerse en el mismo sector o dirección del círculo.

Cualquier grupo de frecuencias, p_v , que se concentren en 12 clases (n° de clases, $v = 12$), puede generar una serie de valores p_v / n , ($n =$ suma total de frecuencias) que definen una distribución de frecuencia, siempre que la suma de frecuencia tenga algún sentido y pueda analizarse como una variable circular. O sea que la distribución de densidad circular puede aplicarse a todas las distribuciones anuales de valores climáticos al igual que en paleocorrientes o datos direccionales de propiedades masivas vectoriales de las rocas.

La distribución de von Mises (figuras 1 y 2), tiene un estimador A de la moda μ y una antimoda \hat{A} , ($\hat{A} = \mu - 180^\circ \sim A - 180^\circ$). La moda μ , es la dirección horizontal más frecuente. El origen de las mediciones es arbitrario (ej: la dirección Norte o el 15 de Enero) Los datos utilizados tienen carácter di-

reccional o posicional, de manera que los valores que toma la variable no se relacionan mediante una escala de razones iguales. Por ejemplo: $0^\circ = 360^\circ$ y la dirección 160° no debe considerarse el doble de la dirección 80° (ambas son diferentes relaciones angulares respecto al cero ubicado en el Norte). En trabajos recientes se denomina *media* al valor μ (Potter y Pettijohn, 1977, McLane, 1995, Swan y Sandilands, 1995). Sin embargo, por las razones expresadas más arriba, se prefiere denominar *moda* y no *media* al parámetro μ . Se calcula además el coeficiente de consistencia o resultante (R) que es el módulo del vector resultante, mediante **3** y **3b**. Este valor se denomina también *consistency ratio* en Potter y Pettijohn (1977) y McLane (1995) y toma valores entre 0 y 1. Se puede expresar también en por ciento ($L = R \times 100$).

La magnitud del ángulo de buzamiento de las mediciones de paleocorrientes responden posiblemente a una forma de distribución de von Mises replegada, pues es irrelevante si el ángulo de buzamiento es $+x$ o $-x$. Este aspecto no es significativo en paleocorrientes donde esta última variable es irrelevante.

El valor de la moda A , se calcula mediante

$$tgA = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen}X_i}{\sum_{i=1}^n \text{cos}X_i} \quad (2)$$

$$tgA = \frac{\sum_{v=1}^m p_v \text{sen}X_v}{\sum_{v=1}^m p_v \text{cos}X_v} \quad (2b)$$

El módulo de R se determina con la expresión:

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{(\sum_{i=1}^n \text{sen}X_i)^2 + (\sum_{i=1}^n \text{cos}X_i)^2} \quad (3)$$

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{(\sum_{v=1}^m p_v \text{sen}X_v)^2 + (\sum_{v=1}^m p_v \text{cos}X_v)^2} \quad (3b)$$

donde n = número de observaciones. Las

expresiones equivalentes (**2b** y **3b**), son adecuadas para datos agrupados, donde p_v son las frecuencias y X_v los puntos medios de cada una de las v clases.

El valor A , calculado está expresado en un rango de $0^\circ \pm 90^\circ$, dependiendo del cuadrante definido por los signos del seno y coseno, para transformarlo a un rango de 0° a 360° , es necesario aplicar la corrección indicada en el Cuadro 1.

Como los valores mayores de R indican menos variancia, se puede aplicar la transformación:

$$s_o = 1 - R \quad (4)$$

que se conoce como desviación típica circular y su rango es de 0 a 1. El valor 0 indica que todas las direcciones tienen la misma frecuencia (o sea *la distribución es uniforme*).

La tabla 1, tomada de Gumbel y otros (1954) y ampliada por McCabe (en Swan y Sandilands, 1995, tabla 2-12) permite obtener el estimador κ del parámetro k en función de R .

Los puntos de inflexión para la distribución normal circular son $\pm 1 / (k)^{1/2}$ para valores de κ grandes (Gumbel y otros, 1953).

En general las aplicaciones geológicas de la distribución normal circular tienden a simplificar la práctica usando A como estimador del vector resultante y una forma de relación entre R y la desviación típica lineal, s , debido a que ni R ni el estimador k , obtenido mediante la tabla 1, se expresan en grados y pueden ser visualizados fácilmente. Pincus (1956) en su revisión de la distribución normal circular desarrolló la expresión:

$$R = \frac{\text{sen}(\sqrt{3}s)}{\sqrt{3}s} \quad (5)$$

donde $0 < s \leq \pi/3$ y s se expresa en radianes. La relación entre s (el error típico, que puede usarse en lugar de la desviación típica) y A , queda expresada según Swan y Sandilands (1995), mediante:

Tabla 1. Los valores de κ (estimador de k) en función de R (el módulo del vector resultante) .Modificada a partir de las tablas de Gumbel y otros (1953) y McCabe (en Swan y Sandilands, 1995).

R	κ	R	κ	R	κ
0,00	0,000	0,58	1,436	0,91	5,852
0,02	0,040	0,59	1,475	0,915	6,196
0,04	0,080	0,60	1,516	0,92	6,539
0,06	0,120	0,61	1,557	0,925	6,983
0,08	0,161	0,62	1,600	0,93	7,426
0,10	0,201	0,63	1,645	0,933	7,821
0,12	0,242	0,64	1,691	0,936	8,215
0,14	0,283	0,65	1,739	0,94	8,610
0,16	0,324	0,66	1,790	0,943	9,164
0,18	0,366	0,67	1,842	0,946	9,718
0,20	0,408	0,68	1,896	0,95	10,272
0,22	0,451	0,69	1,954	0,952	10,771
0,24	0,495	0,70	2,014	0,954	11,270
0,26	0,539	0,71	2,077	0,956	11,769
0,28	0,584	0,72	2,144	0,958	12,268
0,30	0,629	0,73	2,214	0,96	12,767
0,31	0,652	0,74	2,289	0,962	13,599
0,32	0,676	0,75	2,369	0,964	14,432
0,33	0,700	0,76	2,455	0,966	15,264
0,34	0,724	0,77	2,547	0,968	16,096
0,35	0,748	0,78	2,646	0,97	16,929
0,36	0,772	0,79	2,754	0,971	17,762
0,37	0,797	0,80	2,871	0,972	18,595
0,38	0,823	0,805	2,936	0,973	19,428
0,39	0,848	0,81	3,000	0,974	20,260
0,40	0,874	0,815	3,071	0,975	21,093
0,41	0,900	0,82	3,143	0,976	21,926
0,42	0,927	0,825	3,222	0,977	22,759
0,43	0,954	0,83	3,301	0,978	23,592
0,44	0,982	0,835	3,390	0,979	24,425
0,45	1,010	0,84	3,479	0,98	25,258
0,46	1,039	0,845	3,580	0,981	27,757
0,47	1,068	0,85	3,680	0,982	30,257
0,48	1,098	0,855	3,796	0,983	32,756
0,49	1,128	0,86	3,911	0,984	35,256
0,50	1,159	0,865	4,044	0,985	37,756
0,51	1,191	0,87	4,177	0,986	40,255
0,52	1,224	0,875	4,333	0,987	42,755
0,53	1,257	0,88	4,489	0,988	45,255
0,54	1,291	0,885	4,674	0,989	47,754
0,55	1,326	0,89	4,859	0,99	50,254
0,56	1,362	0,895	5,082	1	∞
0,57	1,398	0,90	5,305		

$$s_e = \frac{1}{\sqrt{nR\kappa}} \quad (6)$$

este valor permite calcular límites de confianza alrededor de la moda que tiene un rango $A + 1,96 s_e$ y $A - 1,96 s_e$, con un valor crítico $\alpha = 0,05$. Con 95% de probabilidades de que la moda caiga entre los dos límites. Un ejemplo práctico veremos más adelante.

El valor de A es siempre el mejor estimador de la moda de la población μ de la distribución normal circular (Potter y Pettijohn, 1977) y siempre debe calcularse (si se dispone al menos de dos valores X_i). En el caso de las paleocorrientes los valores de X_i originales medidos en el campo deben corregirse por inclinación secundaria cuando esta supera los 10° . A medida que aumenta el buzamiento de las capas se debe extremar la precisión en la medición de paleocorrientes, pues los errores por inclinación secundaria son muy serios en la estimación de μ y κ . En estos cálculos de la moda no intervienen los buzamientos de la laminación cruzada. Pero una vez corregidos los azimutes, los buzamientos resultantes deben ser razonables (cercaos o menores que el ángulo de reposo de la arena en agua o el aire, según el caso, o sea entre 10° y 35°). Un buzamiento corregido mayor de 35° o menor a 10° hace menos confiable a la medición pero de ninguna manera descartable.

Si la desviación típica por localidad es pequeña, ($2s < 114^\circ$), la distribución normal lineal pueden usarse como aproximación de la distribución de densidad normal circular (Agterberg y Briggs, 1963). Este procedimiento fue utilizado con éxito razonable en varios trabajos de paleocorrientes de Argentina y Brasil (Bossi y otros 1975, 1977, Bossi, 1982, Tófaló y otros, 1985). Los procedimientos de inferencia y de análisis de variancia, tan bien desarrollados para la distribución normal lineal, pueden aplicarse a estos casos.

Ejemplos de aplicación

1. Cálculo de la distribución de la temperatura del aire a lo largo del año en la ciudad de Mendoza

Consideremos una distribución de temperaturas medias del aire para cada uno de los doce meses del año en la ciudad de Mendoza, que se han registrado a lo largo de varios años (tabla 3). La serie:

$$\frac{p_v}{\sum_{v=1}^{12} p_v} \quad (7)$$

es una distribución circular porque los valores p_v (temperatura media mensual) no son negativos y porque el ciclo anual se repite cada doce meses ($v = 1$ a 12). Los datos pueden agruparse en doce segmentos de 30 días cada uno, hasta totalizar 360 días (tabla 3, columnas 1 y 2). Hay que tener en cuenta que los meses son de largo irregular. (febrero tiene 28 días, abril, junio, setiembre y noviembre traen 30 y los restantes 31). Para compensar el largo desigual de los meses, en los meses de enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre, multiplicamos el valor de p_v por $30/31 = 0,96776$ y en febrero por $30/28 = 1,07143$. Los restantes meses quedan como están. Los nuevos valores p'_v están ajustados a meses iguales (tabla 3, columnas 3 y 4). La suma de las frecuencias, n , es:

$$n = \sum_{v=1}^{12} p'_v \quad (8)$$

Al corregir por el largo de los meses modificamos la suma total n , de manera que debemos hacer un nuevo ajuste, multiplicando el valor p'_v de cada clase por el coeficiente Q , que es:

$$Q = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{12}}{p'_1 + p'_2 + p'_3 + \dots + p'_{12}} \quad (9)$$

Esta nueva corrección ($Q \cdot p'_v$) genera el conjunto de 12 valores p''_v , distribuidos en un año de 360 días (tabla 3, columna 5) que

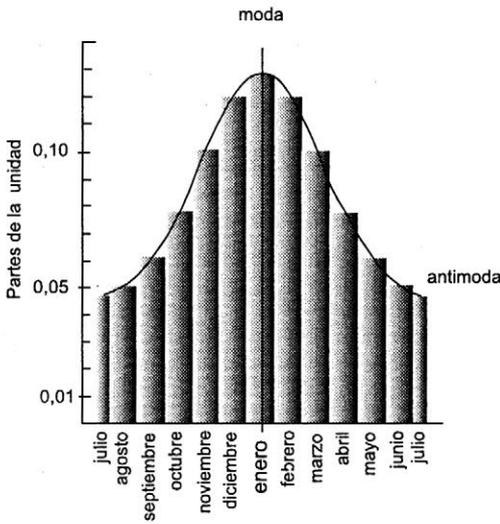


Fig. 2. Distribución de Von Mises para $k = 0.5$. para una variable anual desarrollada como histograma lineal. El origen es el día 15 de enero. La curva continua representa el valor $\phi(X; \mu; \kappa)$, el largo de las barras corresponde a los valores de $\Delta\phi(X; \mu; \kappa)$ tomados de la tabla 2.

quedan expresados como grados (1 día = 1°). Estos ajustes tienen sentido si las diferencias entre el mes con valor más alto (ej.: más caluroso) y el más bajo (más frío) es mayor a 10%. Cuando es menor a 1%, es innecesario hacer la segunda corrección (en el ejemplo considerado la diferencia es 1,65%).

Los valores de p''_v pueden graficarse en un histograma lineal, (figura 2) o en una rosa de los vientos (figura 3). El día 15 del mes más caluroso (la moda) se ubica en dirección norte. Los restantes valores se grafican en sentido de las agujas del reloj. Para hacer comparables las áreas de los conos (observados y teóricos) dentro de la rosa de los vientos, se usan los valores $(p''_v)^{1/2}$, tanto

de la distribución observada como teórica. Si las distribuciones de temperatura media mensual son muy diferentes en las distintas localidades que se quieren comparar, las rosas de los vientos dibujadas tienen diferente tamaño. Se pueden igualar para comparación, transformando la variable, mediante:

$$p''_v / P''_v \tag{10}$$

donde $P''_v (= \sum p''_v / 12)$ es la gran moda de todos los meses. En este caso se pierde el efecto visual de las frecuencias originales.

En el caso de los datos anuales la moda se puede calcular mediante una modificación de (2b), que resulta más práctica, reemplazando X_v por la variable p''_v . En este caso los valores de p''_v , de cada mes del año se expresan, como sigue: ene. (enero) = p''_1 ; feb. (febrero) = p''_2 ; ... y dic. (diciembre) = p''_{12} . Los valores constantes en (11) y (12) son: $\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = 0,5$ y $\cos 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = 0,86603$, que representan la deflexión (en grados) de los meses correspondientes, respecto al eje enero-junio. El denominador de la expresión (2b) resulta así:

$$\sum_1^{12} \cos p_v = (\text{jul.} - \text{ene.}) + 0,86603(\text{ago.} - \text{feb.} + \text{jun.} - \text{dic.}) + 0,5(\text{sep.} - \text{mar.} + \text{may.} - \text{nov.})$$

y el numerador

$$\sum_1^{12} \text{sen } p_v = \text{oct.} - \text{abr.} + 0,86603(\text{sep.} - \text{mar.} + \text{nov.} - \text{may.}) + 0,5(\text{ago.} - \text{feb.} + \text{dic.} - \text{jun.})$$

El valor entre 0° y 360° de **A** se obtiene observando la regla de los signos según el cuadrante y realizando la transformación

Cuadro 1. Valores angulares convertidos a una distribución de 0° a 360°

1° cuadrante [sen (+) y cos (+)] ángulo tal cual
2° cuadrante [sen (+) y cos (-)] restar a 180°
3° cuadrante [sen (-) y cos (-)] sumar 180°
4° cuadrante [sen (-) y cos (+)] restar a 360°

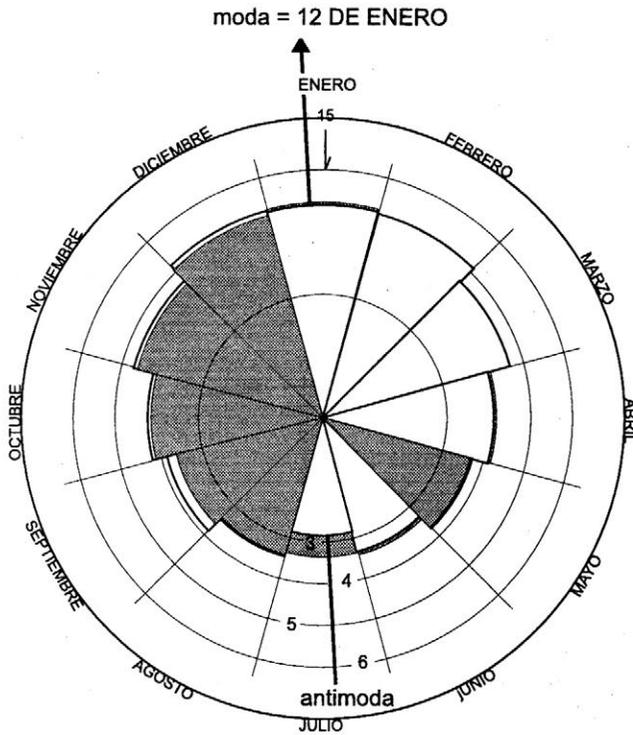


Fig. 3. Rosas de los vientos, basadas en datos teóricos en gris y observados (en blanco), correspondiente al ejemplo 1. El área de cada cono es proporcional a la frecuencia. La moda es el día 12 de enero.

adecuada (Cuadro 1).

El estimador κ se obtiene de la tabla 1 una vez determinado el valor de R mediante la expresión (3b) para datos agrupados. El cálculo de la expresión (11) para el ejemplo de la tabla 3, es:

$$\sum_{v=1}^{v=12} \text{cosp}_v = 26,0691 - 8,3618 + 0,86603(25,4858 - 12,1 + 26,5609 - 10,7) + 0,5(21,34 - 15,2 + 22,3 - 14,0675) = 17,7073 + 25,32852 + 7,18625 = 50,22207$$

y para la expresión (12), para el ejemplo de la tabla 3, es:

$$\sum_{v=1}^{12} \text{sen}p_v = 16,5 - 17,7073 +$$

$$+ 0,86603(21,3471 - 15,2 + 14,0675 - 22,3) + 0,5(25,4858 - 12,1 + 10,7 - 26,5609) = -1,2073 + (-1,80602) + (-1,23755) = -3,01332$$

La tangente de la moda es:
 $\text{tg } A = -3,01332 / 50,22207 = -0,06$
 que corresponde al ángulo (ver regla de los signos en el cuadro 1):
 $A = -3,43^\circ = 356,57^\circ$ que equivale a: $356^\circ 34' 12''$

El origen de esta distribución es el punto medio de la primera clase o sea el día 15 de enero, de manera que la moda está desplazada -3 días (antes), o sea el día 12. Esto se debe a que la temperatura media de diciembre es relativamente muy alta.

El valor de R se determina mediante la expresión (3b):

Tabla 2. Los valores de $\Delta\phi(X_i; \mu; k)$, para clases de 30° y diferentes valores de κ . Tomada de Gumbel (1954). Obsérvese que la suma de las fracciones de cada línea es 1 y corresponde a una distribución de Von Mises con $C = 1$. La media se encuentra en 0° .

κ	Media (0°)	$\pm 30^\circ$	$\pm 60^\circ$	$\pm 90^\circ$	$\pm 120^\circ$	$\pm 150^\circ$	180°
0,0	0,08333	0,08333	0,08333	0,08333	0,08333	0,08333	0,08333
0,1	0,09176	0,09056	0,08735	0,08314	0,07912	0,0630	0,07530
0,2	0,10051	0,09793	0,09111	0,08255	0,07476	0,06953	0,06770
0,3	0,10962	0,10539	0,09458	0,08158	0,07031	0,06304	0,06058
0,4	0,11895	0,11286	0,09774	0,08024	0,06581	0,05690	0,05394
0,5	0,12846	0,12032	0,10054	0,07858	0,06133	0,05110	0,04780
0,6	0,13810	0,12768	0,10296	0,07662	0,05690	0,04570	0,04217
0,7	0,14782	0,13491	0,10501	0,07440	0,05256	0,04069	0,03704
0,8	0,15755	0,14196	0,10666	0,07196	0,04837	0,03608	0,03239
0,9	0,16726	0,14880	0,10793	0,06933	0,04434	0,03186	0,02822
1	0,17690	0,15539	0,10882	0,06656	0,04049	0,02804	0,02449
1,1	0,18644	0,16171	0,10934	0,06369	0,03686	0,02459	0,02118
1,2	0,19584	0,16772	0,10953	0,06076	0,03345	0,02149	0,01826
1,3	0,20507	0,17345	0,10938	0,05781	0,03026	0,01872	0,01569
1,4	0,21413	0,17885	0,10895	0,05484	0,02730	0,01627	0,01344
1,5	0,22298	0,18395	0,10824	0,05190	0,02457	0,01410	0,01149
1,6	0,23163	0,18874	0,10729	0,04901	0,02206	0,01219	0,00979
1,7	0,24007	0,19320	0,10613	0,04617	0,01978	0,01052	0,00833
1,8	0,24829	0,19738	0,10476	0,04344	0,01768	0,00906	0,00707
1,9	0,25630	0,20127	0,10324	0,04078	0,01578	0,00778	0,00599
2	0,26409	0,20487	0,10158	0,03822	0,01407	0,00668	0,00506
2,1	0,27167	0,20822	0,09979	0,03578	0,01252	0,00572	0,00427
2,2	0,27905	0,21130	0,09790	0,03345	0,01113	0,00489	0,00360
2,3	0,28623	0,21415	0,09592	0,03124	0,00988	0,00418	0,00303
2,4	0,29322	0,21677	0,09388	0,02914	0,00876	0,00356	0,00255
2,5	0,30003	0,21917	0,09179	0,02715	0,00776	0,00304	0,00214
2,6	0,30666	0,22138	0,08966	0,02528	0,00687	0,00258	0,00179
2,7	0,31312	0,22338	0,08752	0,02352	0,00607	0,00220	0,00150
2,8	0,31942	0,22522	0,08535	0,02186	0,00536	0,00187	0,00126
2,9	0,32557	0,22688	0,08318	0,02031	0,00474	0,00158	0,00105
3	0,33157	0,22838	0,08100	0,01886	0,00418	0,00135	0,00088
3,1	0,33744	0,22974	0,07884	0,01750	0,00369	0,00114	0,00073
3,2	0,34317	0,23096	0,07670	0,01624	0,00325	0,00096	0,00061
3,3	0,34878	0,23204	0,07458	0,01505	0,00286	0,00082	0,00051
3,4	0,35427	0,23301	0,07249	0,01394	0,00252	0,00069	0,00043
3,5	0,35964	0,23386	0,07042	0,01292	0,00222	0,00058	0,00036
3,6	0,36490	0,23460	0,06839	0,01196	0,00196	0,00049	0,00030
3,7	0,37006	0,23524	0,06639	0,01107	0,00172	0,00042	0,00025
3,8	0,37513	0,23579	0,06442	0,01026	0,00151	0,00035	0,00020
3,9	0,38009	0,23625	0,06251	0,00949	0,00133	0,00030	0,00017
4	0,38497	0,23662	0,06063	0,00877	0,00117	0,00025	0,00014
4,1	0,38976	0,23692	0,05879	0,00812	0,00102	0,00021	0,00012
4,2	0,39446	0,23714	0,05700	0,00750	0,00090	0,00018	0,00010

Tabla 3. Temperatura media del aire en la ciudad de Mendoza (Argentina) a lo largo de los 12 meses del año. Los números en *itálicas* de la segunda columna corresponden a los meses de 30 días que no tienen corrección. El total (= n) se aplica sólo en las correcciones.

Mes (días de duración) v = 12	Temperatura media (°C) (p.)	Primera corrección 30/31 = 0,967742 (p'v)	Primera Corrección 30/28= 1,07143 (p'v)	Segunda corrección Q = 1,01653 (p''v)	Valores teóricos de $\Delta\phi(\alpha) * 216,4$ para k = 0,47, obtenidos de la tabla 2.
Enero (31)	26,5	25,65		26,07	27,18
Febrero (28)	23,4		25,07	25,49	25,55
Marzo (31)	21,7	21,00		21,35	21,58
Abril (30)	<i>16,5</i>			<i>16,50</i>	16,94
Mayo (31)	14,3	13,84		14,07	13,56
Junio (30)	<i>10,7</i>			<i>10,70</i>	11,43
Julio (31)	8,5	8,23		8,36	10,74
Agosto (31)	12,3	11,90		12,10	11,43
Septiembre	<i>15,2</i>			<i>15,20</i>	13,56
Octubre	18	17,42		17,71	16,94
Noviembre	22,3			22,30	21,58
Diciembre	27	26,13		26,56	25,55
Totales (n =)	216,4			216,40	(*) 216,05

(*) valor aproximado; $P_v = P''_v = 216,4/12 = 18,03$

$$R = 1/216,4 \left((-3,01332)^2 + (50,22207)^2 \right)^{1/2} = 50,3123882/216,4 = 0,2324972$$

el valor de κ según la tabla 1, interpolado entre 0,22 y 0,24, es:

$$\kappa = 0,476725$$

el error típico (expr. 6) es (usando en este caso, el total de la 1ª columna de la tabla 3, n = 216,4):

$$s_e = 1 / (216,4 * 0,2324972 * 0,476725)^{1/2} = 0,204187$$

y la desviación típica circular, según la expresión (5):

$$s_o = 1 - R = 0,7675028$$

Mediante los valores interpolados de la tabla 2, para $\kappa = 0,48$, multiplicados por

216,4, se obtienen los valores teóricos de una distribución normal circular. Los mismos se indican en la última columna de la tabla 3. Los valores observados y teóricos son suficientemente próximos para aceptar que los datos tienen una distribución de densidad normal circular (se puede aplicar un ensayo χ^2 , para determinar la significación de las diferencias). La figura 3, muestra esta relación en dos rosas de los vientos superpuestas (original y teórica). El radio de los conos es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia (columnas 5 y 6 de la tabla 3).

Ejemplo 2. Cálculo de la moda y resultante en una localidad de paleocorrientes en el Neógeno del Valle del Cajón (Pcia. de Catamarca)

Es muy común que se disponga de datos azimutales medidos con brújula en una loca-

Tabla 4. Los datos azimutales del ejemplo 2, agrupados (n = 30) obtenidos en una localidad de paleocorrientes del Neógeno del Valle del Cajón (Provincia de Catamarca, Argentina).

	2	3	4	5	6
Puntos medios azimutales de las clases	Puntos medios de las clases (media = 0°)	frecuencia observada	Frecuencias teóricas, $\Delta\phi(\alpha)$	f cos θ ,	f sen θ ,
15	-150	0	0,09	0	0
45	-120	0	0,24	0	0
75	-90	2	0,82	0,5176	1,9319
105	-60	4	2,76	-1,0353	3,8637
135	-30	7	6,57	-4,9497	4,9497
165	0	10	8,98	-9,6593	2,5882
195	30	4	6,57	-3,8637	-1,0353
225	60	2	2,76	-1,4142	-1,4142
255	90	1	0,82	-0,2588	-0,9659
285	120	0	0,24	0	0
315	150	0	0,09	0	0
345	180	0	0,07	0	0
Totales (n =)		30	30,00	-20,6634	9,9181

lidad donde afloran estructuras cruzadas direccionales (referidos al norte). En tal caso los datos están en grados y pueden agruparse en doce clases de 30° cada una, que no precisan la corrección que aplicamos a los meses. La tabla 4 muestra un ejemplo de tal naturaleza. El valor del azimut medio se calcula mediante (2b):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} A &= 9,918077307993 / - \\ &-20,66337973403 = 0,4799833055218 \\ A &= -25,64 \end{aligned}$$

de donde, A' , que es el azimut medio referido al norte es:

$$A' = 180^\circ - A = 154,36^\circ$$

(de acuerdo a la regla de corrección del cuadro 1)

El valor de R , se calcula mediante la expresión (3b) que es válida para datos agrupados. Observese que en la tabla 4, se han

multiplicado los senos y cosenos por las frecuencias, p , de cada clase, (siendo en este caso, n = 30).

$$\begin{aligned} R &= 1/30 (98,368 + 426,975)^{1/2} = \\ &= 22,920 / 30 = 0,764 \\ s_0 &= 1 - 0,764 = 0,236 \end{aligned}$$

De la tabla 1 se extrae el valor de κ a partir de R . En nuestro caso $R = 0,764$ y $\kappa = 2,491684$ (interpolado).

Mediante la tabla 2, calculamos los valores teóricos para cada clase (30°) de nuestros datos agrupados de paleocorrientes. La cuarta columna de la tabla 4, muestra los valores de $\Delta\phi(X, \mu, k)$ resultantes, previa interpolación para $\kappa = 2,49$ y multiplicación por 30. Puede observarse que la distribución original y teórica son muy parecidas (figura 4). La figura 5, muestra el histograma circular

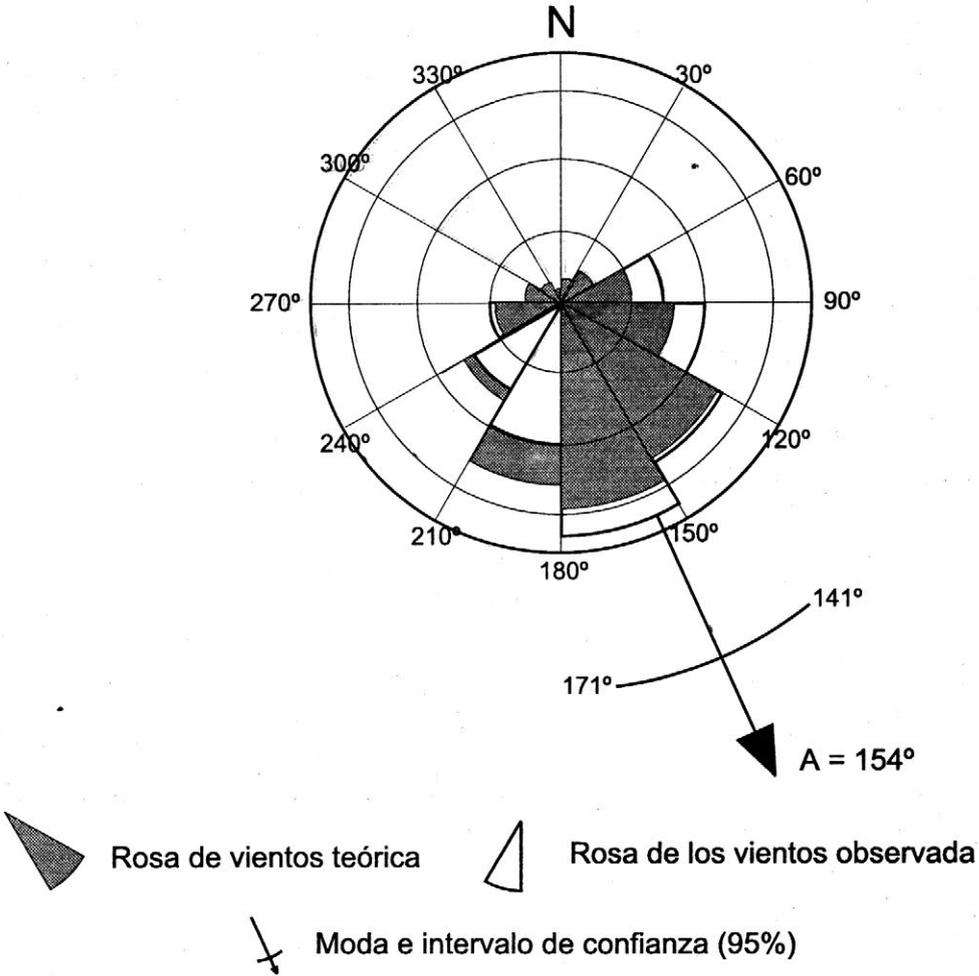


Fig. 4. La rosa de los vientos del ejemplo 2 (paleocorrientes). Los datos teóricos están en la rosa gris, los observados en la blanca. La frecuencia es proporcional al área de cada cono. Obsérvese las diferencias con la rosa de los mismos datos, dibujada en la figura 5 con la frecuencia (%) proporcional al largo de cada cono.

de los mismos datos construido con las frecuencias originales trasladadas a porcentos. Queda claro en la comparación entre las figuras 4 y 5, la exageración de los radios de los conos correspondientes a las clases mayores en ésta última figura.

El error típico es:

$$s_e = 1 / (n * R * \kappa)^{1/2} = 1 / 7,557 = 0,1323 \text{ (en radianes)}$$

que en grados es (multiplicando por 57,2956) = 7,582°

Los límites de confianza para $\alpha = 0,05$, son:

$$\text{Límite superior: } 156^\circ + 1,96 * 7,5817^\circ = 156 + 14,860^\circ = 170,86^\circ$$

$$\text{Límite inferior: } 156^\circ - 1,96 * 7,582^\circ = 156 - 14,860^\circ = 141,14^\circ$$

O sea que con 95 % de probabilidades, la

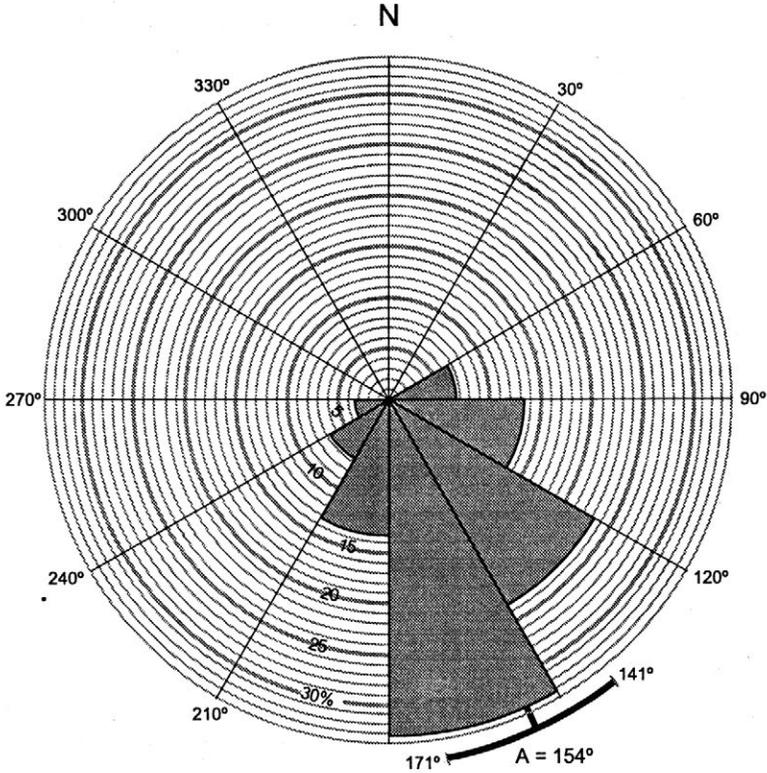


Fig. 5. La rosa de los datos observados correspondiente al ejemplo 2 (paleocorrientes). Obsérvese la diferencia de efecto visual de esta rosa con la rosa de los mismos datos de la figura 4. Las clases son de 30° y $k=2,492$. Se ha representado la moda (A) y el intervalo de confianza con nivel 95%.

moda cae entre estos dos límites. También se puede plantear que existe una dirección de paleocorrientes hipotética (digamos 180°) que se supone es la dirección del paleodrenaje. Postulamos la hipótesis nula, $H_0 = 180^\circ$ para la dirección modal y la hipótesis alternativa, $H_a \neq 180^\circ$. Como en este caso el valor 180° cae fuera de los límites de confianza, podemos rechazar H_0 , con un nivel de confianza 95%.

Se puede estimar la significación de la dirección modal calculada precedentemente, mediante el ensayo de Rayleigh (Swan y Sandilands, 1995). El ensayo compara el valor R con los valores de la tabla 5, entrando con el valor n y el valor crítico (α) (ver tabla 5).

Para $\alpha=5\%$ (o un nivel de confianza de 95%) y $n=30$, el valor límite para R , es: 0,31. Como nuestro valor de R es mayor, aceptamos que la resultante es significativa y proviene de una distribución con orientación preferencial.

Conclusiones

1. La distribución normal circular denominada también de Von Mises, es aplicable a los datos circulares utilizados en Geología como así mismo a otros de naturaleza cíclica, especialmente climática.

2. La distribución tiene un campo de variación entre 0 y 360° y admite que los datos

Tabla 5. Valores críticos de R para el ensayo de Rayleigh. Tomados de McCabe (en Swan y Sandilands, 1995).

n	α %			
	10	5	2,5	1
3	0,86	0,96	1,03	1,13
4	0,75	0,84	0,91	1,03
5	0,67	0,75	0,82	0,94
6	0,62	0,69	0,76	0,87
7	0,57	0,64	0,70	0,82
8	0,53	0,60	0,66	0,77
9	0,50	0,57	0,63	0,73
10	0,48	0,54	0,59	0,70
11	0,46	0,52	0,57	0,67
12	0,44	0,49	0,54	0,64
13	0,42	0,48	0,52	0,62
14	0,40	0,46	0,51	0,60
15	0,39	0,44	0,49	0,58
16	0,38	0,43	0,47	0,56
17	0,37	0,42	0,46	0,54
18	0,36	0,41	0,45	0,53
19	0,35	0,39	0,44	0,52
20	0,34	0,38	0,42	0,50
22	0,32	0,37	0,41	0,48
24	0,31	0,35	0,39	0,46
26	0,30	0,34	0,37	0,44
28	0,29	0,33	0,36	0,43
30	0,28	0,31	0,35	0,41
35	0,26	0,29	0,32	0,38
40	0,24	0,27	0,30	0,36
45	0,23	0,26	0,28	0,34
50	0,21	0,24	0,27	0,32
60	0,20	0,22	0,25	0,30
70	0,18	0,21	0,23	0,27
80	0,17	0,19	0,21	0,26
90	0,16	0,18	0,20	0,24
100	0,15	0,17	0,19	0,23
200	0,11	0,12	0,14	0,16

estén distribuidos alrededor del círculo, siendo posible evaluar mediante sus estadísticos si existe orientación preferencial. No es necesario una tendencia central más frecuente. Más bien, la dirección preferencial queda definida por las relaciones entre moda y antimoda.

3. Al no existir limitaciones de rango, la distribución normal circular se hace especialmente apta para el análisis de paleocorrientes donde es frecuente la presencia de direcciones que se interpretan como "anómalas" y al parecer "contrarias" a la tendencia general.

4. Los estadísticos usados son fáciles de calcular así como los ensayos de significación. Se incluyen para facilitar su uso las tablas necesarias y ejemplos de cálculo.

Lista de trabajos citados en el texto

- Agterberg, F. P. & G. Briggs. 1963. Statistical analysis of ripple-marks in Atokan and Desmoinesian rocks in the Atoka Basin of east-central Oklahoma. *J. Sediment. Petrol.*, 33: 393-410.
- Bossi, G. E. 1982. Descripción del programa AZMED para análisis de paleocorrientes. *Boletín Sedimentológico*, 1 (1): 17-39.
- Bossi, G. E.; A. Villanueva García; M. Godeas; M. I. Kousal; M. A. Lutz & C. Monteros. 1975. Análisis estadístico de imbricaciones en la Formación Quebrada del Barro, Marayes, Prov. de San Juan, Argentina. *Revista AMPS*, 6 (1-2): 23-54.
- Bossi, G. E.; A. E. Mendes Piccoli; F. Pilatti; S. L. Thomaz; I. C. Jabur; M. A. Rodrigues & E. M. Medeiros. 1977. Paleocorrientes da Formação Botucatu nas folhas de Montenegro, Novo Hamburgo, Taquara, Gravataí e São Leopoldo, RS. *Acta Geológica Leopoldensia, Estudos Tecnológicos, Unisinos*, 3 (2): 83-109 y gráficos.
- Davis, J. C. 1986. *Statistical and data analysis in Geology*. J. Wiley, New York, 646 pp.
- Fisher, N. I. 1993. *Statistical analysis of circular data*. Academic Press, Londres, U.K., 277 pp.
- Gumbel, E. J. 1954. Application of the circular normal distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, 49: 267-297.
- Gumbel, E. J.; J. A. Greenwood & D. Durand. 1953. The circular normal distribution, theory and tables. *J. Am. Stat. Assoc.*, 48: 131-152.
- Kovach, W. L. 1994. Oriana for Windows. Users' manual and software (v. 1.0). Kovach Computing Services, Pentraeth, Gales, U.K., 73 pp.
- Krumbein, W. C. & Graybill, F. A. 1965. *An Introduction to Statistical models in Geology*. McGraw Hill Book Co., New York, 100-101 pp & 128-131 pp.
- Pincus, H. J. 1956. Some vector and arithmetic operations on two-dimensional orientation variates with applications to geological data. *J. Geol.*, 64: 533-557.
- Potter, P. E. & F. J. Pettijohn. 1977. *Paleocurrents and Basin Analysis*. Academic Press Inc., New York, segunda edición, 425 pp.
- McLane, M. 1995. *Sedimentology*. Oxford University Press, New York, pp. 101-105.
- Steinmetz, R. 1962. Analysis of vectorial data. *Journal of Sedimentary Petrology*, 32: 801-812.
- Swart, A. R. H. & M. Sandilands. 1995. *Introduction to geological data analysis*. (Tablas estadísticas de P. Mc Cabe). Blackwell Science Ltd., Oxford, Inglaterra, pp. 201-207.
- Tófaló, R. O. L. De Rosa; E. Turco Greco; M. E. Forzetti & M. Asaro. 1985. Análisis estadístico de los conglomerados de la Formación del Ratón (Carbónico en Calingasta, San Juan). *Boletín Sedimentológico, Tucumán*, 1: 49-65.